



## **SIMULATION NUMERIQUE PAR LA METHODE DES CARACTERISTIQUES DES ECOULEMENTS TRANSITOIRES EN CHARGE DANS UNE CONDUITE D'ADDUCTION GRAVITAIRE**

### **NUMERICAL SIMULATION USING CHARACTERISTICS METHOD OF PRESSURIZED TRANSIENT FLOW IN A WATER SUPPLY GRAVITY PIPE**

***CHAOUI S.<sup>1</sup>, HOUICHI L.<sup>1</sup>, TEBBI F. Z.<sup>2</sup>***

<sup>1</sup>Département d'Hydraulique, Faculté de Technologie,

<sup>2</sup>Laboratoire des Risques Naturels et Aménagement du Territoire (LRNAT),  
Université de Batna 2, Algérie

*chaouisab@gmail.com*

### **RÉSUMÉ**

Le phénomène des écoulements transitoires en charge est accompagné des pressions parfois excessives et capables de causer d'énormes dommages aux canalisations et aux appareils hydrauliques. Ces écoulements ont fait l'objet depuis plusieurs années d'investigations relativement avancées. Toutefois, compte tenu du domaine très vaste où ces écoulements sont susceptibles de se produire d'une part, et des difficultés rencontrées, tant sur le plan pratique que théorique, pour résoudre les équations non linéaires y afférentes d'autre part, ces écoulements restent un sujet d'actualité et attirent l'attention des spécialistes concepteurs des installations hydrauliques.

Dans cette contribution, la méthode des caractéristiques est appliquée pour un cas particulier et pratique d'écoulement transitoire dans une conduite d'adduction gravitaire munie en aval d'une vanne d'obturation initialement fermée. L'écoulement transitoire est provoqué par le mouvement d'une vanne placée en amont et produisant au niveau du réservoir des fluctuations sinusoïdales de la charge. La superposition de ces fluctuations et l'influence de la fermeture de la vanne se trouvant en aval de la conduite a permis d'analyser l'interaction fluide structure et d'étudier l'évolution de la charge et du débit en

fonction du temps. Les résultats issus de cette simulation concordent parfaitement avec ceux obtenus par d'autres auteurs.

**Mots clés :** Ecoulement transitoire en charge, Coup de bélier, Conduite gravitaire, Simulation numérique, Méthode des caractéristiques.

## **ABSTRACT**

The phenomenon of transient flows in charge is sometimes accompanied by excessive pressure and can cause huge damage to pipes and hydraulic devices. These flows have been for several years of relatively advanced investigations. However, given the vast area where these flows are likely to occur first, and difficulties, both practical and theoretical, to solve nonlinear equations relating thereto on the other hand, these flows remain a topical issue attracted the attention of designers of hydraulic engineering specialists.

In this contribution, the method of characteristics is applied to a special case and practice of transient flow in a gravity supply pipe provided downstream of an initially closed stop valve. The transient flow is caused by the movement of a valve arranged upstream and producing at the reservoir sinusoidal load fluctuations. The superposition of these fluctuations and the effect of closing the valve located downstream of the pipe were used to analyze the fluid structure interaction and to study the evolution of the head and flow over time. The results of this simulation perfect agreement with those obtained by other authors.

**Keywords:** Pressurized transient flow, Water hammer, Gravity-pipe, Numerical simulation, Method of characteristics.

## **INTRODUCTION**

Le calcul des écoulements transitoires en charge par les méthodes numériques a beaucoup évolué dans les dernières années. L'apparition des ordinateurs a favorisé le développement rapide de la modélisation mathématique et a permis la résolution des équations fondamentales gouvernant les écoulements des fluides en régime transitoires par des méthodes numériques (Amara et al., 2013).

L'objectif recherché est d'apprécier la réaction des réseaux d'eau sous pression durant les écoulements transitoires, de déterminer les zones à risque, c'est-à-dire là où les pressions en régime transitoire dépassent les limites prescrites et ce afin de prévoir les dispositifs nécessaires et adéquats de protection. L'intérêt pratique des solutions numériques, aux divers problèmes que pose l'écoulement transitoire en charge est incontestable, compte tenu des difficultés de mise en œuvre de modèles physiques nécessitant d'énormes coûts et d'importants moyens pour ce type d'écoulement. Le modèle mathématique est par conséquent le moyen le plus économique et le plus expéditif permettant de prévoir le comportement des installations hydrauliques soumis aux écoulements transitoires en charge et de fournir les éléments nécessaires au dimensionnement correct de ces équipements.

Parmi les méthodes numériques utilisées, notre choix a été porté sur la méthode des caractéristiques, en raison de sa précision et de l'interprétation physique qu'elle fournisse (Streeter et Wylie, 1975 ; Balay et Planchar, 1977 ; Wylie et Streeter, 1978 ; Chaudhry, 1987).

Afin d'apprécier l'importance et les avantages que revêtent les méthodes numériques et particulièrement la méthode des caractéristiques dans l'analyse des écoulements transitoires en charge, un des cas pratiques rencontrés dans la gestion et l'exploitation des différents systèmes hydrauliques a été examiné. Il s'agit de la propagation des ondes des écoulements transitoires en charge due à la perturbation de l'état initial d'écoulements par une excitation à la limite amont au niveau du réservoir alimentant une conduite d'adduction gravitaire à caractéristique unique, équipée en aval d'une vanne d'obturation, cette configuration est connue sous le nom de (Problème de Streeter), (Streeter et Wylie, 1975).

## **MISE EN EQUATION DU PHENOMENE (EQUATIONS AUX CARACTERISTIQUES)**

Le phénomène du coup de bélier est régi par l'équation de conservation de la quantité de mouvement (équation dynamique) et l'équation de continuité (Jeager, 1954). Ces équations représentent la variation temporelle et spatiale des variables d'écoulement en régime transitoire. Ces équations s'écrivent comme suit : (Streeter et Wylie, 1975 ; Carlier, 1980 ; Ouragh, 1994)

### Equation dynamique

$$\frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} + \lambda \frac{v|v|}{2D} = 0 \quad (1)$$

### Equation de continuité

$$g \frac{\partial H}{\partial t} + v g \frac{\partial H}{\partial x} + v g \sin \alpha + a^2 \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

Dans lesquelles  $v$ ,  $H$ ,  $D$ ,  $\lambda$ ,  $g$ ,  $\rho$ ,  $\alpha$  et  $a$  sont respectivement la vitesse d'écoulement, la charge, le diamètre de la conduite, le coefficient des pertes de charge linéaire, l'accélération de la pesanteur, la masse volumique, l'angle d'inclinaison de la conduite et la vitesse de propagation de l'onde.

Les équations décrivant le phénomène du coup de bélier sont ainsi un système d'équations aux dérivées partielles de type hyperbolique et non linéaire. Par conséquent, une solution générale de ces équations est impossible. De ce fait, on fait recours à leur intégration en employant les méthodes numériques.

Il est à noter que la résolution de ces équations est basée sur une importante approximation du fait de considérer que l'écoulement est unidimensionnel : la composante verticale de la vitesse est supposé négligeable (Hug, 1975).

Afin d'utiliser la méthode numérique adoptée, on procède à la transformation des deux équations précédentes en deux systèmes d'équations aux dérivées totales : (Verspuj et Tijsseling, 1993).

$$\left. \begin{aligned} \frac{dH}{dt} + \frac{a}{g} \frac{dv}{dt} + v \sin \alpha + \frac{a\lambda v|v|}{2gD} = 0 \\ \frac{dx}{dt} = v + a \end{aligned} \right\} C^+ \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dH}{dt} + \frac{a}{g} \frac{dv}{dt} + v \sin \alpha - \frac{a\lambda v|v|}{2gD} = 0 \\ \frac{dx}{dt} = v - a \end{aligned} \right\} C^- \quad (4)$$

Dans le cas du coup de bélier, la vitesse d'écoulement " $v$ " est très petite par rapport à la célérité " $a$ "; ( $v \ll a$ ); donc  $v$  peut être négligée et les courbes caractéristiques deviennent des droites  $\frac{dx}{dt} = \pm a$  (Rieutord, 1985).

## INTEGRATION DU SYSTEME DIFFERENTIELLE PAR LA METHODE DES CARACTERISTIQUES

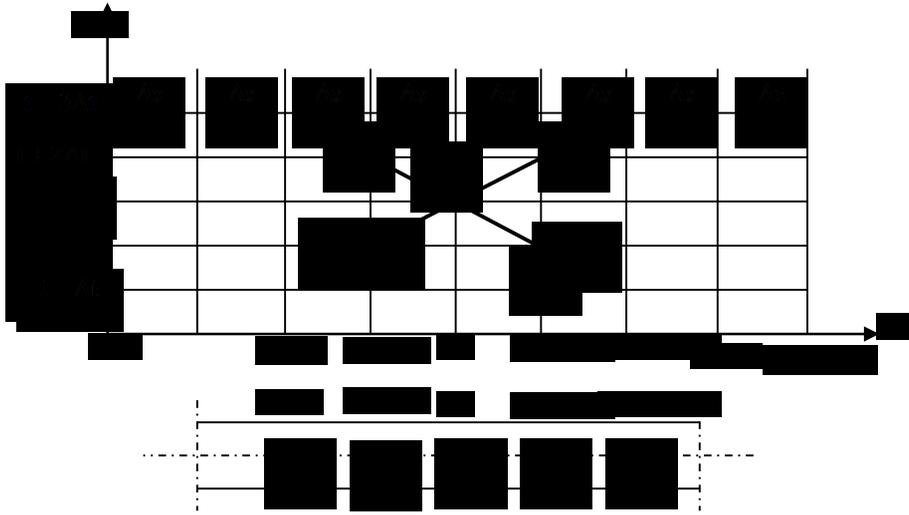
Après avoir remplacé la vitesse par le débit, les équations (3) et (5) deviennent

$$\left. \frac{dH}{dt} + \frac{a}{g} \frac{dQ}{sdt} + \frac{Q}{s} \sin \alpha + \frac{a\lambda Q|Q|}{2gDS^2} = 0 \right\} \quad (3)'$$

$$\left. \frac{dH}{dt} - \frac{a}{g} \frac{dQ}{sdt} + \frac{Q}{s} \sin \alpha - \frac{a\lambda Q|Q|}{2gDS^2} = 0 \right\} \quad (5)'$$

### Discrétisation de la conduite

La canalisation est considérée comme constituée de N tronçons égaux, soit N+1 sections et H et Q sont initialement connus à chaque section.



**Figure 1 :** Discrétisation de la conduite

La condition de stabilité du réseau choisi, dite condition de Courant- Friedrichs- Lewy, est la suivante (Wylie et Streeter, 1978) :

$$C_r = \frac{\Delta t}{\Delta x} a \leq 1 \text{ où } \Delta t \leq \frac{\Delta x}{a} \quad (7)$$

Considérons que Q et H sont connus en deux points  $(Q_{i-1,j-1}; H_{i-1,j-1})$  et  $(Q_{i+1,j-1}; H_{i+1,j-1})$ . La courbe caractéristique plus  $C^+$  représentant l'équation (4)

définit la propagation d'onde dans le sens d'écoulement. L'équation (3) ou (3)' n'est valable que pour  $C^+$ . La courbe caractéristique moins  $C^-$  représentant l'équation (6) définit la propagation d'onde dans le sens contraire d'écoulement.

L'équation (5) ou (5)' est valable seulement pour la caractéristique  $C^-$ .

Les équations (3) ou (3)' et (5) ou (5)' sont appelées équations de compatibilité. Les équations (3)' et (5)' contiennent deux inconnus  $H_{i,j}$  et  $Q_{i,j}$  et passent respectivement par les points connus  $(Q_{i-1,j-1}; H_{i-1,j-1})$  et  $(Q_{i+1,j-1}; H_{i+1,j-1})$  de ses caractéristiques. A l'intersection de  $C^+$  et  $C^-$  au point P, les deux équations peuvent être résolues pour trouver  $Q_{i,j}$  et  $H_{i,j}$ .

Pour effectuer l'intégration des deux équations de compatibilité successivement le long des caractéristiques  $C^+$  et  $C^-$ , discrétisons la conduite en un certain nombre de points.

Parfois, et pour plus de commodité et de simplicité des formules à utiliser pour calculer  $H_{i,j}$  et  $Q_{i,j}$ , on procède à l'intégration des équations de compatibilité, en écrivant les équations aux caractéristiques comme suit:

- le long de la caractéristique  $C^+$  :

$$d \left[ H + \frac{a}{gS} Q \right] + j dx = 0 \quad (8)$$

Ici, on a considéré la conduite horizontale.

- Le long de la caractéristique  $C^-$  :

$$d \left[ H - \frac{a}{gS} Q \right] - j dx = 0 \quad (9)$$

$$j = \frac{\lambda}{2gDS^2} Q |Q| = BQ |Q| \quad (10)$$

Où : Q, S et j sont respectivement le débit, la section de la conduite et la perte de charge unitaire.

L'application des équations (8) et (9) est plus simple particulièrement lorsqu'on considère que la quantité  $a/gS$  est constante, la variation de la section étant négligeable par rapport à la variation de la charge et du débit. Ces équations permettent de déterminer le couple (H, Q) en toute section en partant des conditions aux limites.

Ainsi, on obtient les expressions suivantes pour déterminer les inconnues H et Q :

$$H_{i,j} = \frac{CP+CM}{2} \quad (11)$$

$$Q_{i,j} = \frac{CP-H_{i,j}}{R} \quad (12)$$

$$\text{Ou : } Q_{i,j} = \frac{H_{i,j}-CM}{R} \quad (12)'$$

$$\text{Avec : } CP = H_{i-1} + Q_{i-1}[R - T|Q_{i-1}|]$$

$$CM = H_{i+1} - Q_{i+1}[R - T|Q_{i+1}|]$$

$$R = \frac{a}{gS}$$

$$T = B\Delta x$$

$$B = \frac{\lambda}{2gDS^2}$$

### **Conditions aux limites**

Par conditions aux limites, on entend l'ensemble des conditions initiales et des conditions aux frontières amont et aval du système hydraulique (Streeter et Wylie, 1975).

#### ***Conditions initiales***

Ces conditions expriment l'état des fonctions H et Q à l'instant initial (t = 0). Ils peuvent être données sous forme : H = H (x , 0) = H (x) et Q = Q (x,0) = Q (x).

#### ***Conditions aux frontières***

Les conditions aux limites gauche et droite s'expriment par une relation charge-débit caractérisant le fonctionnement électromécanique ou hydromécanique (pompe, robinet vanne,.....) ou tout simplement l'une des variables H ou Q en fonction du temps. Les conditions aux limites sont indiquées sur la figure 3.

## ENONCE DU PROBLEME

Dans le présent travail, nous examinons l'application de la méthode des caractéristiques à l'étude du régime transitoire dans une conduite d'adduction gravitaire alimentée par un réservoir et munie en aval d'une vanne fermée. L'objectif assigné est d'examiner la propagation de l'onde élastique dans le système proposé, d'appréhender l'interaction fluide structure et d'étudier l'évolution des variables du mouvement en fonction du temps.

Suivant la figure 2, l'écoulement transitoire est provoqué par une perturbation à l'extrémité amont, au niveau du réservoir, schématisée par des fluctuations sinusoïdale d'amplitude  $D_h$  et de pulsation  $\omega$ , soit  $H = H_0 + D_h \sin(\omega t)$ .

A cet effet, un programme a été élaboré en langage Fortran. Pour valider ce programme, on va prendre, dans un premier temps, les mêmes données numériques utilisées par V.L. Streeter qui sont données dans le tableau suivant :

**Tableau 1** : Les données numériques utilisées par V.L. Streeter

Paramètres	Valeur
$H_0$ (mce) : Charge en régime d'écoulement initial	100 m
$Q_0$ (m <sup>3</sup> /s): Débit en régime d'écoulement initial	0,00 (m <sup>3</sup> /s)
$D_h$ (m): Amplitude de l'onde d'excitation au niveau du réservoir	3,00 m
$D$ (mm) : Diamètre de la conduite	500 mm
$L$ (m) : Longueur de la conduite	600 m
$a$ (m/s) : Célérité de propagation de l'onde élastique	1200 m/s
$\lambda$ : Coefficient de résistance due au frottement	0,018
$Dx$ : Pas de l'espace	120 m
$Dt$ : Pas de temps	0,10 s
$N$ : Nombre de pas en discrétisation spatiale	6
$M$ : Nombre de pas en discrétisation temporelle	Suivant $T_{max}$
$T_{max}$ (s): Temps maximal d'analyse	3 s
$H(I,J)$ (mce): Charge en régime transitoire au nœud I à l'instant $T(J) = (J-1)*Dt$	/
$Q(I,J)$ (m <sup>3</sup> /s): Débit en régime transitoire au nœud I à l'instant $T(J) = (J-1)*Dt$	/

Il est demandé de déterminer les paramètres  $H(I,J)$  et  $Q(I,J)$  en écoulement transitoire sachant les conditions suivantes :

- Conditions initiales :  $H(I,1) = H_0$  et  $Q(I,1) = 0$
- Condition à la limite amont :  $H = H_0 + Dh \sin \omega t$  ; ( $\omega = 2\pi$ )
- Condition à la limite droite :  $Q = 0$  (Vanne fermée)

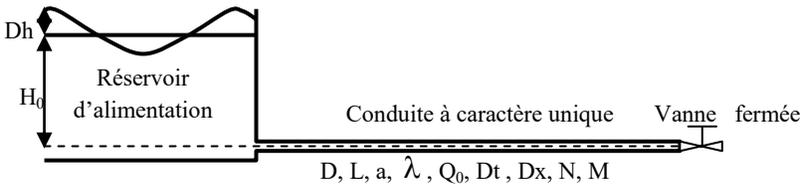


Figure 2 : Schéma de l'adduction gravitaire à caractère unique

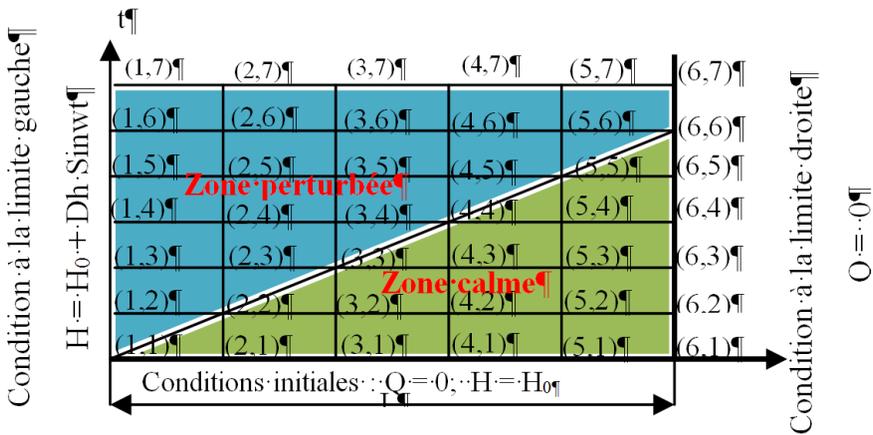
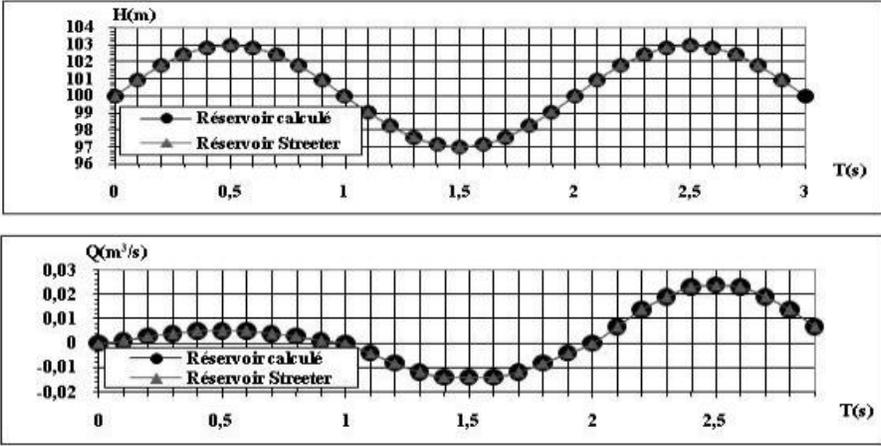


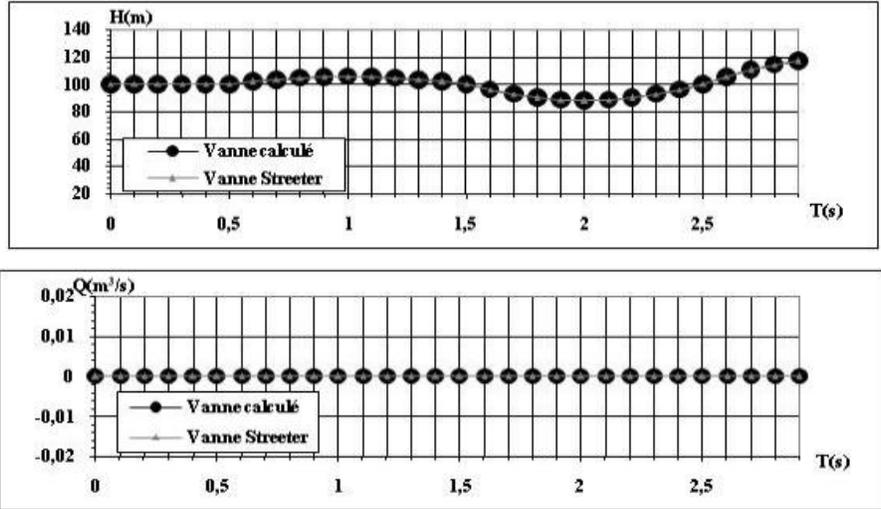
Figure 3 : Discrétisation de la conduite

## RÉSULTATS ET DISCUSSION

En comparant les résultats obtenus dans les figures 4 et 5, en utilisant le programme que nous avons établi et ceux obtenus par V.L. Streeter, on constate une parfaite concordance des résultats obtenus.

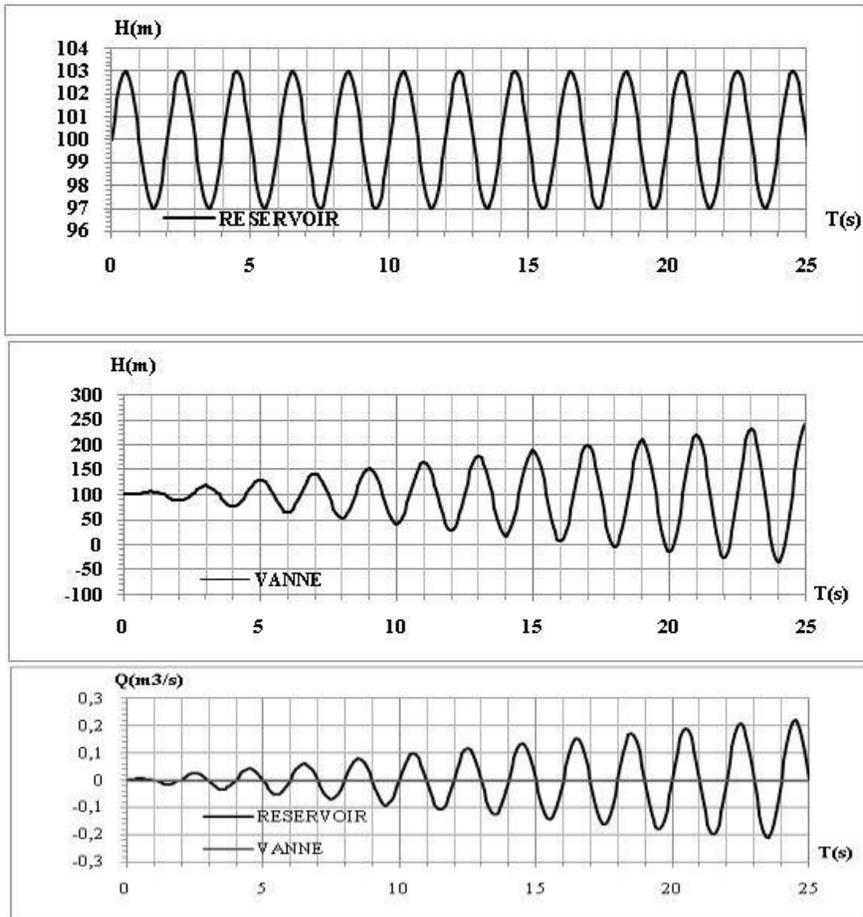


**Figure 4 :** Problème de STREETER - Variation de la charge  $H$  et du débit  $Q$  au niveau du réservoir en fonction du temps ( $T = 3$  s) ( $L = 600$  m,  $H_0 = 100$  m;  $a = 1200$  m/s;  $D = 500$  mm;  $Dx = 120$  m;  $\lambda = 0,018$ ;  $Dh = 3$  m)

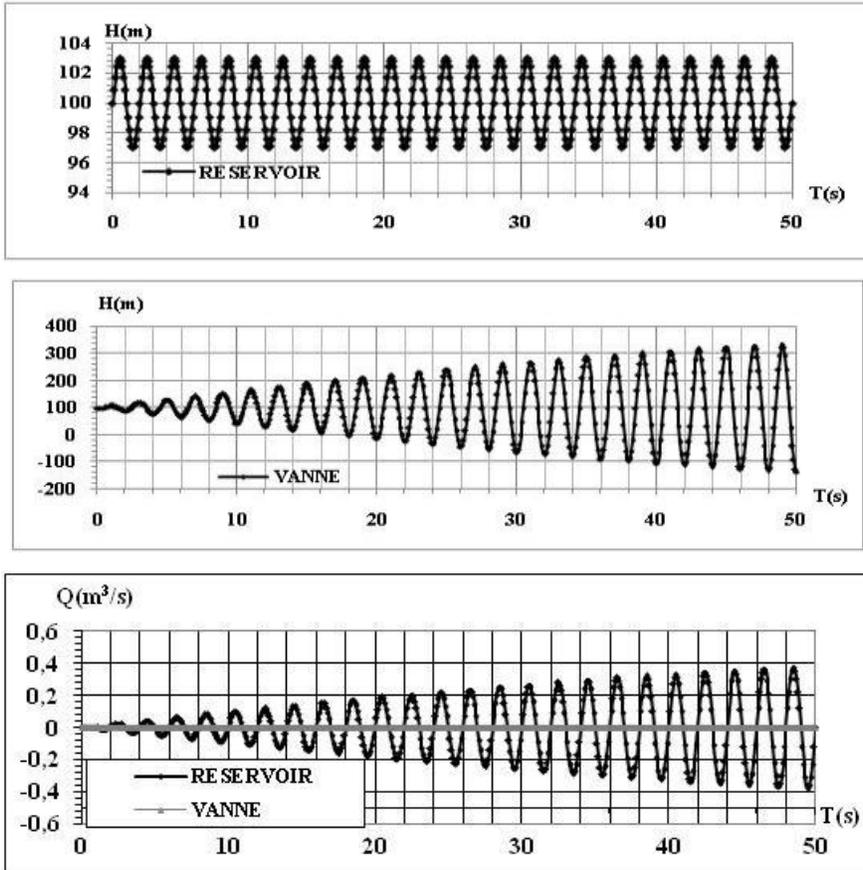


**Figure 5 :** Problème de STREETER - Variation de la charge  $H$  et du débit  $Q$  au niveau de la vanne en fonction du temps ( $T = 3$  s) ( $L = 600$  m,  $H_0 = 100$  m;  $a = 1200$  m/s;  $D = 500$  mm;  $Dx = 120$  m;  $\lambda = 0,018$ ;  $Dh = 3$  m)

Pour mieux apprécier la variation de la charge et du débit en écoulement transitoire en fonction du temps, on augmente le nombre de nœuds de discrétisation temporelle ( $T=25$  s et  $T=50$  s).



**Figure 6 :** Problème de STREETER - Variation de la charge  $H$  et du débit  $Q$  en fonction du temps ( $T = 25$  s) ( $L = 600$  m,  $H_0 = 100$  m;  $a = 1200$  m/s;  $D = 500$  mm;  $Dx = 120$  m;  $\lambda = 0,018$ ;  $Dh = 3$  m)



**Figure 7 :** Problème de STREETER - Variation de la charge  $H$  et du débit  $Q$  en fonction du temps ( $T = 50$  s) ( $L = 600$  m,  $H_0 = 100$  m;  $a = 1200$  m/s;  $D = 500$  mm;  $D_x = 120$  m;  $\lambda = 0,018$ ;  $D_h = 3$  m)

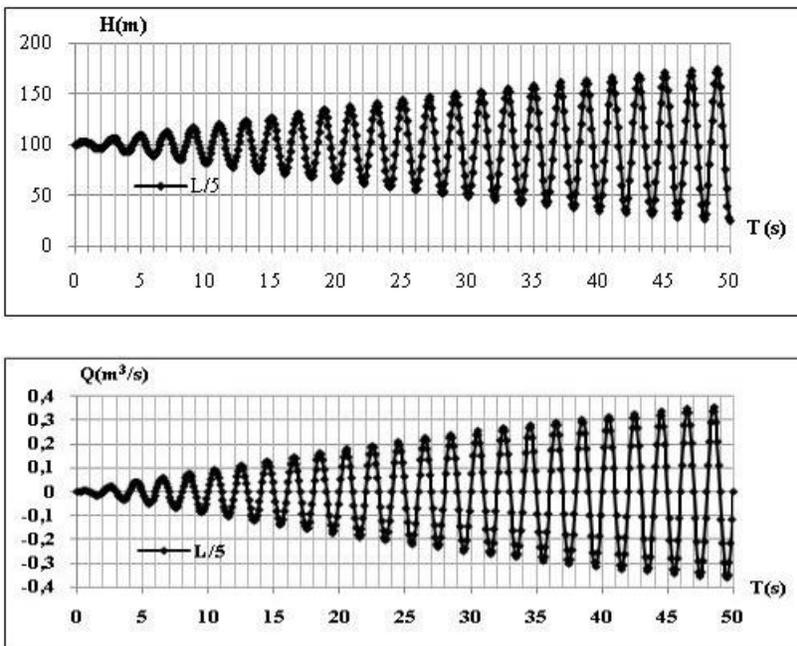
L'exemple de Streeter simule parfaitement le phénomène de propagation des ondes élastiques. Dans ce cas, l'excitation se produit à l'amont au niveau du réservoir et à l'autre extrémité de la conduite (en aval) au niveau de la vanne, la pression atteint sa valeur maximale. Cette pression augmente en fonction du temps, ceci est dû apparemment au phénomène d'oscillations rythmiques de l'onde d'excitation au niveau du réservoir.

Ce phénomène peut être considéré très dangereux pour la tenue mécanique des installations hydrauliques, du fait de la croissance rapide de la pression au

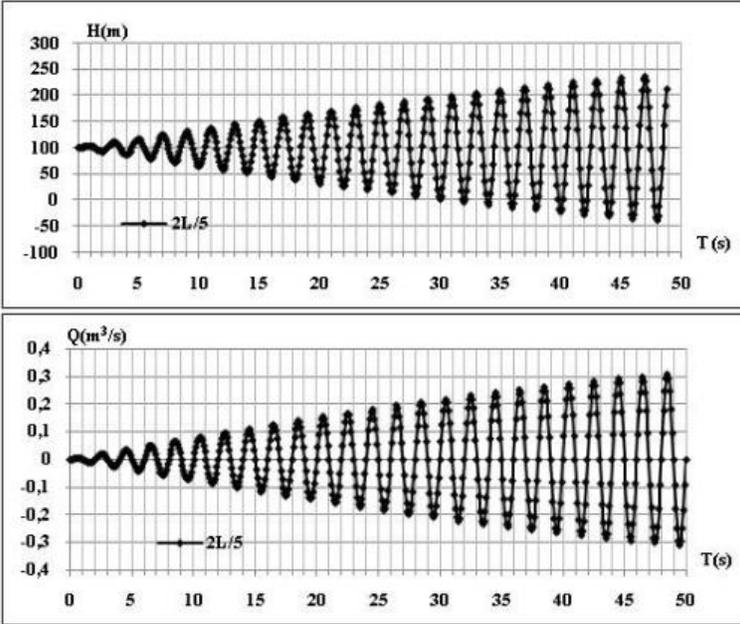
niveau de la vanne en fonction du temps d'analyse, même en tenant compte des pertes de charge; Néanmoins, il peut être utilisé dans le système de surpresseurs, destinés à alimenter en eau des points hauts.

En effet, on constate des valeurs excessives des surpressions et des dépressions au niveau de la vanne.

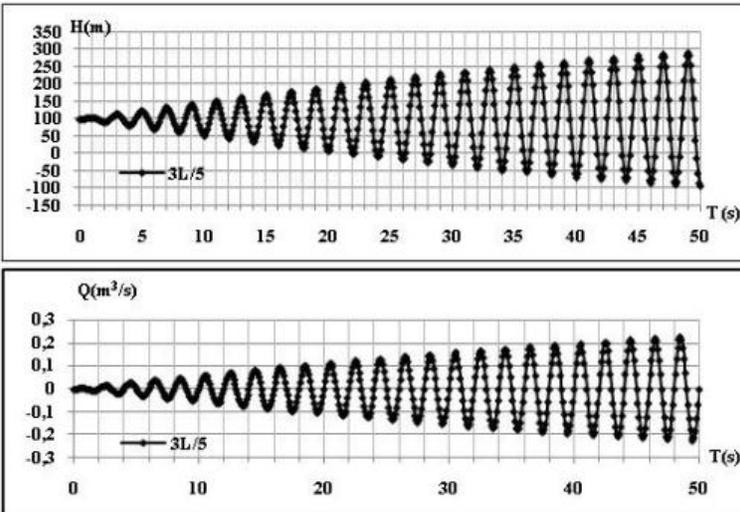
Jusqu'ici, nous nous sommes intéressés à la variation des paramètres  $Q$  et  $H$  au niveau des deux extrémités de la conduite. Afin de mieux analyser le problème examiné, nous présentons ci-après l'évolution de ces paramètres au niveau des points intérieurs de la conduite, aux sections  $L/5 = 120$  m,  $2L/5 = 240$  m,  $3L/5 = 360$  m et  $4L/5 = 480$  m. Les résultats graphiques sont donnés sur les figures 8, 9, 10 et 11.



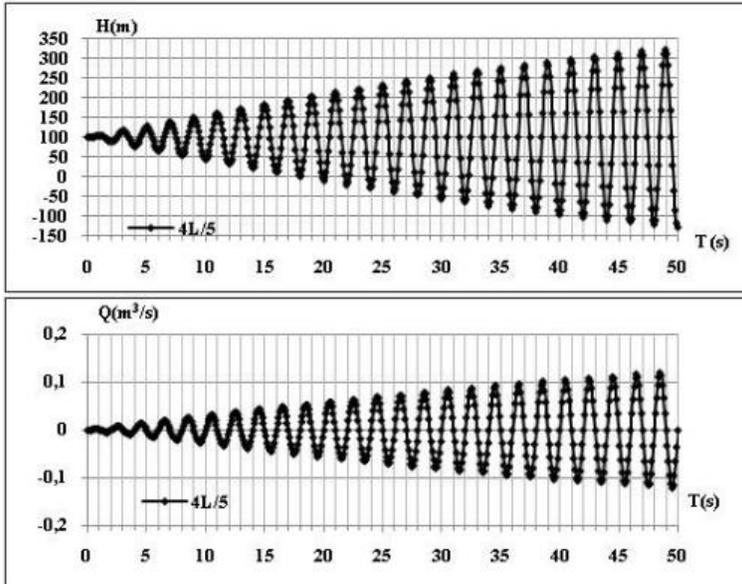
**Figure 8 :** Variation de la charge  $H$  et du débit  $Q$  en fonction du temps ( $T = 50$  s) au niveau du point ( $L/5$ ) ( $L = 600$  m,  $H_0 = 100$  m;  $a = 1200$  m/s;  $D = 500$  mm;  $Dx = 120$  m;  $\lambda = 0,018$ ;  $Dh = 3$  m)



**Figure 9 :** Variation de la charge H et du débit Q en fonction du temps ( $T = 50$  s) au niveau du point ( $2L/5$ ) ( $L=600$ m,  $H_0=100$ m;  $a=1200$  m/s;  $D=500$ mm;  $Dx=120$ m;  $\lambda =0,018$ ;  $Dh=3$  m)



**Figure 10 :** Variation de la charge H et du débit Q en fonction du temps ( $T=50$  s) au niveau du point ( $3L/5$ ) ( $L=600$  m,  $H_0=100$  m;  $a=1200$ m/s;  $D=500$  mm;  $Dx=120$ m;  $\lambda =0,018$ ;  $Dh=3$ m)



**Figure 11** : Variation de la charge  $H$  et du débit  $Q$  en fonction du temps ( $T = 50$  s) au niveau du point ( $4L/5$ ) ( $L=600$ m,  $H_0=100$ m;  $a=1200$  m/s;  $D=500$ mm;  $Dx=120$ m;  $\lambda =0,018$ ;  $Dh=3$  m)

En comparant la figure 7 représentant la variation de  $Q$  et  $H$  au niveau des deux extrémités de la conduite avec les figures 8, 9, 10 et 11 illustrant l'évolution de ces variables au niveau des points intermédiaires, on peut faire les observations suivantes :

- La variation des paramètres en fonction du temps au niveau des deux extrémités de la conduite est subordonnée aux conditions aux frontières: l'excitation sinusoïdale de la charge en amont et la fermeture initiale de la vanne en aval,
- Le phénomène de surpression et de dépression qui accompagne le mouvement provoqué par l'excitation en amont et la fermeture de la vanne en aval est périodique de période  $T = 4L/a$ . Les valeurs de la surpression et de la dépression augmentent en se rapprochant de la vanne fermée en aval.
- Il est de même pour les valeurs absolues des débits en ce qui concerne la périodicité. Par contre, ces valeurs diminuent en se rapprochant de l'extrémité aval.

- Ces résultats sont dus à la superposition des perturbations provoquées aux endroits des deux extrémités.
- La période de propagation des ondes élastiques pour toutes les sections de la conduites est identique et égale à  $4L/a = 2$  s.
- L'effet de l'excitation sinusoïdale en amont est très notable après quelque dizaine de seconde. A ceci s'ajoute l'effet de la vanne fermée en aval après un temps  $L/a = 0,5$  s.
- La présence de la manœuvre sinusoïdale engendre des surpressions et les dépressions importantes particulièrement au niveau de la vanne, ce qui exerce des forces de pressions considérables sur la vanne fermée et sur la conduite pouvant causer leur détérioration.
- On peut observer que dans l'exemple étudié, les pertes par frottement n'atténuent pas l'accroissement de la charge, vu l'effet prépondérant de la perturbation sinusoïdale continue en amont.

## CONCLUSION

Dans le présent travail, la méthode des caractéristiques a été appliquée pour la résolution des équations régissant les écoulements transitoires en charge et ce dans le but d'étudier l'interaction fluide-structure. Notre contribution a été consacrée à la simulation de l'écoulement non permanent dans un système composé d'une conduite d'adduction gravitaire alimentée par un réservoir et munie en aval d'une vanne fermée. L'écoulement transitoire est dû à l'excitation en amont sous forme de fluctuations sinusoïdale de la charge. Nous avons établi un programme qui calcule l'évolution des charges et des débits en différentes sections de la conduite. Les résultats issus des calculs, en employant la méthode des caractéristiques illustrent une parfaite concordance avec les résultats obtenus par Streeter. Cette cohérence nous a permis de valider le modèle élaboré et d'affirmer l'efficacité de la méthode numérique utilisée pour simuler correctement l'interaction fluide structure dans les écoulements transitoires en charge. Les méthodes numériques permettent ainsi de tester un grand nombre de cas et d'étudier plusieurs variantes par la modification des données d'entrée, afin de choisir la solution optimale. Le modèle mathématique est par conséquent le moyen le plus économique et le plus expéditif qui permet d'indiquer l'évolution des paramètres H et Q en divers points du réseau et de donner les éléments nécessaires pour dimensionner correctement les aménagements hydrauliques à projeter.

## **REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES**

- AMARA L., BERREKSI A., ACHOUR B., (2013): Adapted MacCormack Finite-Differences Scheme for Water Hammer Simulation, Journal of Civil Engineering and Science, Vol. 2, Iss. 4, PP. 226-233.
- BALAY R., PLANCHARD J., (1977) : Méthodes numériques en simulation des écoulements unidimensionnels, EDF Bulletin de la direction des études et recherche, Série A N°2, pp. 123-148, Paris.
- BEAUCHEMIN P., (1992) : Calcul des coups de bélier – Méthodes modernes et approximations rapides à partir d'hypothèses physiquement réalistes, Sciences et techniques de l'eau, Vol.26, N°3, pp.257-264.
- CARLIER M., (1980) : Hydraulique générale et appliquée, Edition Eyrolles, Paris.
- CHAUDHRY M. H., (1987): Applied Hydraulic Transients. New York, Van Nostrand Reinhold Company.
- HUG M., (1975): Mécanique des fluides appliquée, Edition Masson, Paris.
- JEAGER C., (1954): Hydraulique technique, Edition Dunod, Paris.
- OURAGH Y., (1994): Ecoulement forcé en hydraulique, Tome 2, Edition O.P.U., Alger.
- RIEUTORD R., (1985): Ecoulement non stationnaire en conduite de fluide compressible, INSA Lyon.
- STREETER V.L., WYLIE E.B., (1975): Fluid mechanics McGraw Hill Book Company, USA.
- VERSPUY C., TIJSSELING A.S., (1993): Hydraulic ram analysis (Analyse du bélier hydraulique, Journal of hydraulic research, Vol. 31, N°2.
- WYLIE E.B., STREETER V.L., (1978): Fluid transients McGraw-Hill International Book Company, 384 pages, USA.