



CALCUL NUMERIQUE D'UN ECOULEMENT BIDIMENSIONNEL NON PERMANENT A TRAVERS UN ELARGISSEMENT RECTILIGNE SYMETRIQUE A SURFACE LIBRE

NUMERICAL COMPTING OF 2D UNSTEADY FREE SURFACE FLOW THROUGH A RECTILINEAR SYMETRICAL EXPANSION

***BERREKSI A.¹, BENMAMAR S.², KETTAB A.², REMINI B.³,
IKNI T.¹, NAKIB M.²***

¹ Laboratoire de Recherche en Hydraulique Appliquée et Environnement (LRHAE),
Université de Bejaia, Faculté de Technologie, Département d'Hydraulique,
Targa Ouzemour, 06000, Bejaia, Algérie.

² Laboratoire de Recherche LRS-EAU, E.N.P., Alger, Algérie.

³ Laboratoire de Recherche LARHYSS, Université de Biskra, Algérie.

Berreksi.ali@gmail.com

RESUME

Le présent travail a pour but la résolution des équations bidimensionnelles de Saint Venant régissant des écoulements non permanents et supercritiques traversant une transition hydraulique correspondant à un élargissement rectiligne symétrique qui est généralement utilisée dans les coursiers d'évacuateurs de crue à surface libre. La discrétisation des équations du mouvement, qui sont du type hyperbolique et non linéaires, sera faite moyennant le schéma aux différences finies implicite de Beam et Warming. La détermination des profils des lignes d'eau le long de l'axe de symétrie et le long de la paroi latérale, ainsi que les réseaux d'écoulement tridimensionnel et bidimensionnel est l'objectif de la partie application, et ceci afin de tester l'aptitude du modèle numérique élaboré à simuler le type d'écoulement étudié.

Mots clés : Saint Venant, Non permanent, Expansion, Torrentie, Implicite, Beam et Warming.

ABSTRACT

The purpose of this work is the resolution of the Saint Venant two-dimensional equations governing unsteady and supercritical flows crossing a hydraulic transition corresponding to a symmetrical rectilinear expansion which is generally used in the free surface spillways chutes. The discretization of the equations of motion, which are of the type hyperbolic and nonlinear, will be made using Beam and Warming implicit finite differences scheme. The determination of the water profiles along the axis of symmetry and the solid side wall as well as the three-dimensional and two-dimensional flow patterns, is the objective of the application part, and this in order to test the aptitude of the elaborate numerical model to simulate the type of studied flow.

Key words: Saint Venant, Unsteady, Expansion, Supercritical, Implicit, Beam and Warming.

INTRODUCTION

Les coursiers d'évacuateurs, qui sont généralement à section transversale rectangulaire, peuvent être dans certains cas prismatiques, mais dans la majorité des cas, ils contiennent des changements locaux de section, ce qui les rend non prismatiques. Ces changements de section qui peuvent être, soit des rétrécissements ou des élargissements, n'occupent qu'une petite distance dans la longueur totale du coursier, ils sont ainsi appelés "*Transitions*" (Berreksi, 2012). L'écoulement de l'eau à travers ces transitions entraîne souvent des irrégularités et des ondulations très dangereuses, surtout dans le cas des écoulements torrentiels dans des contractions de canaux (Hager, 1992).

L'objectif de la présente étude est d'analyser le passage d'un écoulement à surface libre, bidimensionnel, en régime non permanent et à grande vitesse à travers une transition hydraulique représentée par un élargissement rectiligne symétrique. L'écoulement en question est gouverné par le système d'équations de Saint Venant, obtenu à partir de l'intégration suivant la profondeur des équations tridimensionnelles de Navier Stokes tout en faisant quelques hypothèses simplificatrices.

La résolution analytique des équations du mouvement déterminées est quasiment impossible car elles sont du type hyperbolique et non linéaire. Ceci étant, une résolution numérique est plus que nécessaire ; pour cela, on se propose d'utiliser un schéma aux différences finies implicite assez fastidieux,

qui n'est autre que celui de Beam et Warming, qui a des particularités bien spécifiques.

Le modèle numérique ainsi élaboré sera testé dans le cas d'une expansion rectiligne symétrique, où on tentera de calculer numériquement d'une part, le profil de la surface libre le long de l'axe de symétrie et le long de la paroi latérale solide, et d'autre part, les réseaux d'écoulement tridimensionnel et bidimensionnel.

MISE EN EQUATIONS

Les équations du mouvement régissant l'écoulement analysé sont obtenues à partir de l'intégration suivant la profondeur des équations tridimensionnelles de Navier Stokes suivant la profondeur et qui sont appelées équations des écoulements en eau peu profonde ou "*Shallow water equations*" (Wu, 2008). Bien évidemment, lors de l'établissement de ces équations quelques suppositions simplificatrices ont été utilisées, dont essentiellement une distribution hydrostatique des pressions, un fluide incompressible et une répartition uniforme des vitesses sur la verticale. Le système d'équations du mouvement s'écrit en termes des variables d'écoulement h , u et v de la manière suivante (Berreksi et al., 2013) :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u h) + \frac{\partial}{\partial y}(v h) = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(u h) + \frac{\partial}{\partial x} (u^2 h + g \frac{h^2}{2}) + \frac{\partial}{\partial y}(u v h) = g h (S_{0x} - S_{fx}) \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(v h) + \frac{\partial}{\partial x}(u v h) + \frac{\partial}{\partial y} (v^2 h + g \frac{h^2}{2}) = g h (S_{0y} - S_{fy}) \tag{3}$$

Où, h , u , v et g représentent respectivement la profondeur d'écoulement, la vitesse longitudinale suivant x , la vitesse transversale suivant y et l'accélération de la pesanteur. Par ailleurs, S_{0x} , S_{0y} , S_{fx} , S_{fy} , α_x , α_y et n correspondent dans l'ordre aux pentes de fond suivant x et y , aux pentes de frottement suivant x et y , aux inclinaisons du fond par rapport à x et à y et au nombre de rugosité de Manning. Ces paramètres sont donnés par les expressions ci-dessous (Berreksi et al., 2008)

$$S_{\text{ox}} = \sin \alpha_x \quad (4)$$

$$S_{\text{oy}} = \sin \alpha_y \quad (5)$$

$$S_{\text{fx}} = \frac{n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h} \frac{b+h}{bh}^{1/3} \quad (6)$$

$$S_{\text{fy}} = \frac{n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h} \frac{b+h}{bh}^{1/3} \quad (7)$$

RESOLUTION NUMERIQUE

Les équations du mouvement obtenues sont assez délicates et nécessitent une attention particulière, car elles sont tout simplement de nature hyperbolique et non linéaire ce qui entraîne une impossibilité d'une résolution analytique directe ; ainsi, une résolution purement numérique s'impose d'elle-même. Parmi les différentes méthodes numériques retrouvées dans la littérature spécialisée dans ce domaine, notre choix s'est porté sur celle des différences finies moyennant le schéma implicite assez fastidieux de Beam et Warming, et dont la première version a été proposée par ces dits chercheurs en 1976 (Beam et Warming, 1976).

Actuellement, plusieurs formulations de ce schéma sont énoncées, à savoir : Backward Euler, Three-Point Backward, Euler Explicit, Leapfrog Explicit et Crank Nicolson (Fennema et Chaudhry, 1989).

Bien que la majorité des schémas aux différences finies implicites ne nécessitent de condition de stabilité, car ils sont inconditionnellement stables, certains auteurs proposent d'utiliser quand même la condition de Courant-Friedrichs-Lewy, car pour eux, c'est une manière effective de choisir un pas de temps approprié (Ikni et al., 2004).

APPLICATION

Dans cette partie on traitera le passage d'un écoulement supercritique à travers un élargissement rectiligne symétrique donné par la figure (1) ci-dessous.

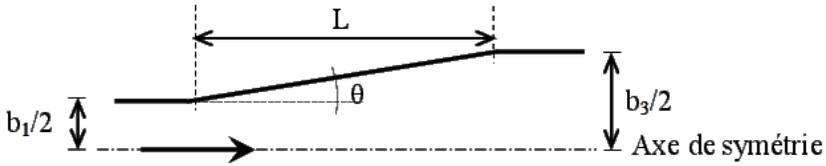


Figure 1 : Elargissement rectiligne symétrique

On signale que ce cas a été étudié théoriquement par Bagge et Herbich (1967). Puis une étude expérimentale a été faite par Herbich et Walsh (1972).

Les principales données de ce problème sont :

- la longueur de la transition est : $L = 1.52$ m ;
- la largeur amont est : $b_1 = 0.305$ m ;
- la largeur de la transition à l'aval est : $b_3 = 0.610$ m ;
- l'angle de déviation de la paroi est : $\theta = 5.73^\circ$;
- le nombre de Froude amont est : $F_1 = 4.15$;
- les pentes de frottements sont supposées nulles ;
- le fond est très faiblement incliné avec une pente d'environ 0.745° ;

Les profils de la surface d'eau le long de l'axe de symétrie et le long de la paroi de l'élargissement rectiligne sont illustrés par les figures (2) et (3) respectivement.

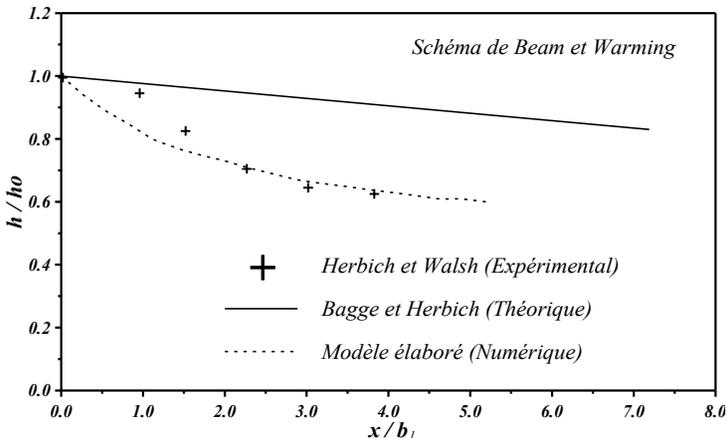


Figure 2 : Ligne d'eau au niveau de l'axe de symétrie dans un élargissement rectiligne symétrique

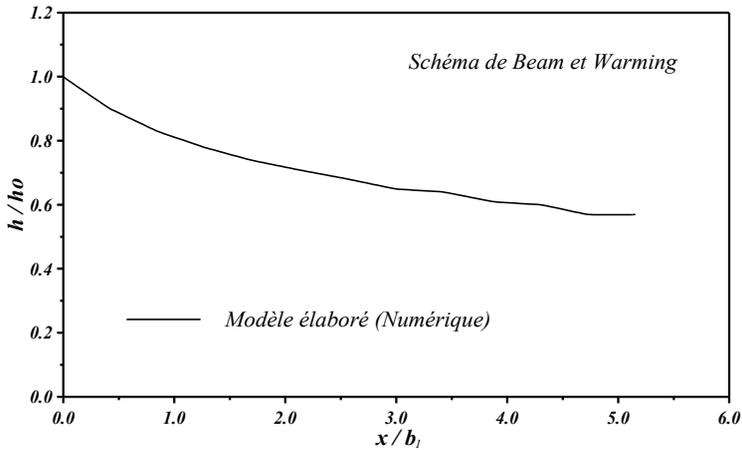


Figure 3 : Ligne d'eau au niveau de la paroi dans un élargissement rectiligne symétrique

A travers ces deux figures, on constate que le long de l'axe de symétrie la ligne d'eau décroît progressivement de l'amont vers l'aval, le profil calculé coïncide avec le profil expérimental de Herbich et Walsh (1972) dans la deuxième moitié de la transition, alors qu'il s'éloigne dans la première partie. D'un autre côté, le modèle numérique a donné une surface d'eau nettement inférieure à la surface théorique déterminée par Bagge et Herbich (1967) également. Par ailleurs, le long de la paroi, on remarque que l'allure de la ligne d'eau présente un rabaissement graduel en fonction de la longueur de la transition, ce qui est concordant avec l'écoulement dans des élargissements de canaux.

Les figures (4) et (5) ci-après donnent respectivement les schématisations tridimensionnelle et bidimensionnelle du réseau d'écoulement à travers l'élargissement rectiligne symétrique.

On observe clairement que la surface d'eau décroît en fonction de la distance d'une façon progressive, et que le système d'ondes ne cause nullement de perturbations dans la transition étudiée.

Calcul numérique d'un écoulement bidimensionnel non permanent a travers un élargissement rectiligne symétrique a surface libre

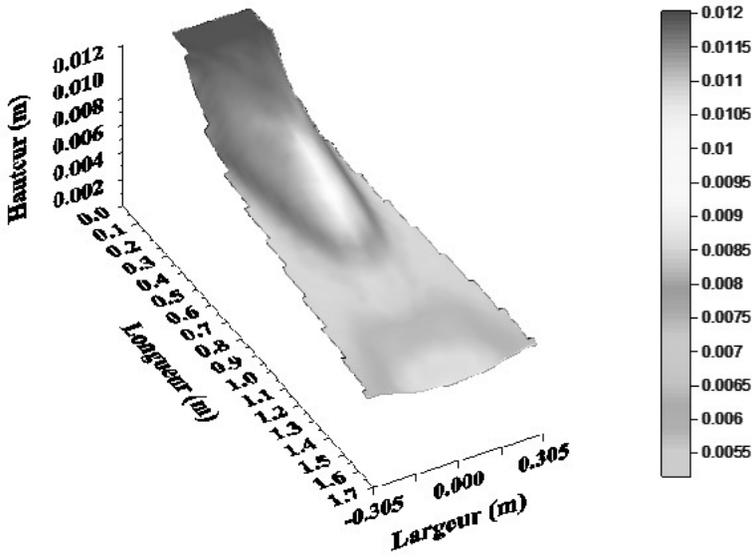


Figure 4 : Représentation tridimensionnelle de l'écoulement dans un élargissement rectiligne symétrique

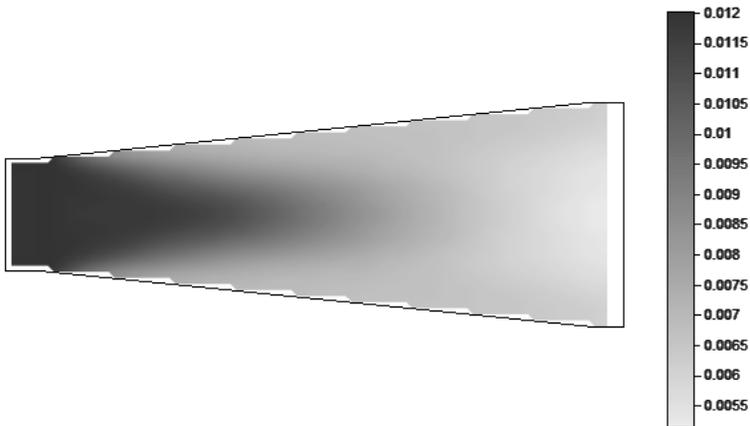


Figure 5 : Représentation plane de l'écoulement dans un élargissement rectiligne symétrique

CONCLUSION

Le calcul numérique en hydraulique et en mécanique des fluides, a pratiquement envahi tous les domaines de recherches et d'applications en sciences de l'eau et en ingénierie des fluides. Nous en avons tous bénéficié, dans la mesure où cette invasion a permis une meilleure compréhension de phénomènes complexes dans les fluides, et a fourni un référentiel pour tester et vérifier les concepts et leurs schémas opérationnels.

L'objectif du travail de recherche présenté, est la modélisation mathématique puis numérique des écoulements à surface libre bidimensionnels instationnaires et en régime supercritique à travers une zone de transition hydraulique correspondant à une expansion rectiligne symétrique. Ce type d'écoulement est gouverné par le système d'équations du mouvement des écoulements à surface libre en régime non permanent et à deux dimensions spatiales, donné par Jean-Claude Barré de Saint Venant. Ce système a été obtenu à partir de l'intégration suivant la profondeur des équations de Navier Stokes moyennant des hypothèses simplificatrices, appelées hypothèses classiques de Saint Venant.

Un modèle de calcul numérique a été élaboré afin de résoudre le système d'équations, il est basé sur une discrétisation suivant le schéma aux différences finies implicite de Beam et Warming. Ce modèle, testé pour le cas d'un écoulement torrentiel dans un élargissement rectiligne symétrique, a donné des résultats acceptables dans l'ensemble. Les parois dans le dit élargissement divergent suivant un angle de déviation θ . Il existe donc, des points de discontinuités à l'endroit de la jonction entre les parois de la transition et celles des canaux rectangulaires amont et aval. Le choix de l'angle de déviation doit se faire d'une manière judicieuse, sinon un décollement se manifestera juste au début de la transition, entraînant la non hydrostaticité de la pression. Cela explique ainsi, la différence entre les résultats calculés et les valeurs expérimentales de Herbich et Walsh (1972). Signalons que les élargissements rectilignes peuvent entraîner des particularités du type ondes transversales.

BIBLIOGRAPHIE

- BAGGE, G. ET HERBICH, J. B. (1967): « Transitions in supercritical open-channel flow ». *Jour. of Hydr. Div., ASCE*. Vol. 93. No. HY5, pp. 23-41.
- BEAM, R. M. ET WARMING, R. F. (1976): « An implicit finite-difference algorithm for hyperbolic systems in conservation-law form ». *Jour. of Comput. Physics*. Vol. 22, pp. 87-110.

- BERREKSI, A., KETTAB, A., REMINI, B. ET BENMAMAR, S. (2008) : « Computation of two-dimensional unsteady supercritical flows in open channel contraction of spillway chutes ». *Dam Engineering, International Papers of Technical Excellence, Water Power and Dam Construction*, Vol. XIX, Issue 3, pp. 149-168.
- BERREKSI, A. (2012) : « Modélisation et simulation numérique des écoulements non permanents dans des canaux à ciel ouvert ». Thèse de Doctorat. Ecole Nationale Polytechnique d'Alger (148 Pages).
- BERREKSI, A., KETTAB, A., REMINI, B., BENMAMAR, S., IKNI, T. ET BELHOCINE, M. (2013) : « Modélisation et simulation de l'écoulement torrentiel bidimensionnel à travers une structure hydraulique divergente ». 5ème Colloque International sur les ressources en eau et le développement durable. CIREDD'2013. Alger, 24-25 Février.
- FENNEMA, R. J. ET CHAUDHRY, M. H. (1989) : « Implicit methods for two-dimensional unsteady free-surface flows ». *Jour. of Hydr. Research*. Vol. 27. No. 3, pp. 321-332.
- HAGER, W. H. (1992) : « Spillways, shockwaves and air entrainment: Review and recommendation ». *Commission Internationale des Grands Barrages, CIGB, Bulletin* 81.
- HERBICH, J.B. ET WALSH, P. (1972): « Supercritical flow in rectangular expansions ». *Jour. of Hydr. Div., ASCE*. Vol. 98. No. 9, pp. 1691-1700.
- IKNI, T., BERREKSI, A., BENMAMAR, S. ET KETTAB, A. (2004) : « Intégration des équations de Saint Venant à deux dimensions par un schéma aux différences finies implicite, Application : Ecoulement torrentiel dans un canal uniforme et dans un divergent rectiligne ». Premier Séminaire National sur les Sciences de la Terre au Service du Développement Durable, Université de Tébessa, 26-27 Avril.
- WU, W. (2008) : « Computational river dynamics ». Taylor & Francis Group Edition, London (494 pages).