



SOLUTION ANALYTIQUE EXACTE POUR LES ÉCOULEMENTS SUPERCRITIQUES DANS LES CANAUX COURBES RECTANGULAIRES

EXACT ANALYTICAL SOLUTION FOR SUPERCRITICAL FLOW IN RECTANGULAR CURVED CHANNELS

AMARA L.^{1,3}, BERREKSI A.², ACHOUR B.³

- ¹. Département de Génie Civil et Hydraulique, Faculté des Sciences et de la Technologie, Université de Jijel, 18000, Algérie
- ². Laboratoire de recherche en Hydraulique Appliquée et Environnement (LRHAE). Faculté de Technologie, Département d'Hydraulique, Université de Bejaia, 06000, Bejaia, Algérie
- ³. Laboratoire de Recherche en Hydraulique Souterraine et de Surface (LARHYSS), Université de Biskra, 07000, Algérie

lyes.amara@univ-jijel.dz

RESUME

Le présent travail porte sur la modélisation mathématique et solution analytique simple du problème des ondes de choc dans les canaux courbes rectangulaires en régime supercritique. A ce jour, plusieurs modèles numériques et quelques solutions analytiques ont été proposés, toutefois les restrictions et complexités de ces modèles développés durant les dernières décades font naître un besoin accru d'un outil simple et fiable pour les besoins pratiques. Par le truchement de la méthode des perturbations en série de puissance de la courbure relative, les équations 2-D curvilignes de Saint-Venant ont été réduites à une forme linéaire. La solution analytique de l'équation d'ondes non homogène a été obtenue par la méthode de d'Alembert après adjonction des conditions aux limites. La validation de la solution proposée a été faite sur le cas d'un canal courbe où il a été question de prédire la configuration de la surface libre dans un canal de profil rectangulaire. Les données ayant servi de test sont issues des expériences d'Ippen (1936), Poggi (1956) et Beltrami et al. (2007) et les résultats furent à cet effet très satisfaisants comparativement aux mesures expérimentales.

Mots clés : Canaux courbes, Solution analytique, Ecoulement supercritique, Séries perturbatives.

ABSTRACT

The present work deals with the mathematical modelling and analytical solution of the problem of standing waves in rectangular curved channels under supercritical flow regime. To date, several numerical models and some analytical solutions have been proposed, however the restrictions and complexities of these models developed during the last decades lead to an increased need for a simple and reliable tool for practical use. Using the perturbation method in power series of the relative curvature, the curvilinear 2-D Saint-Venant's equations have been reduced to a linear form. The analytical solution of the non-homogeneous wave equation was obtained by the D'Alembert method after adding the boundary conditions. The validation of the proposed solution was made on the case of a curved channel where it was a question of predicting the configuration of the free surface in a rectangular cross-section profile. The data used as a test come from the experiences of Ippen (1936), Poggi (1956) and Beltrami et al. (2007) and the results were very satisfactory for this purpose compared to the experimental measurements.

Keywords: Curved channels, Analytical solution, Supercritical flow, Perturbative series.

INTRODUCTION

La conception des coursiers d'évacuateurs de crue joue un rôle important dans la sécurité des barrages et obéit à une myriade de critères interdépendants. Le contexte et impératifs du terrain imposent souvent au coursier un tracé en plan en alignement courbe. Les écoulements s'y formant dans ce cas étant en régime supercritique, la conjugaison de cet état avec un changement de direction donne naissance aux perturbations de la surface libre provoquées par des ondes de choc croisées, d'où l'intérêt d'une étude soignées de ce phénomène dans la pratique en vue d'un correct dimensionnement des murs bajoyers (Knapp, 1951).

Les premières investigations sur les écoulements en canaux courbes avec ondes de choc sont dues à l'illustre Ippen (1936). Ce dernier développa une approche analytique et mena des expérimentations intensives pour sa validation. Une

actualisation de cette approche théorique et des expériences supplémentaires ont été faites par Ippen et Knapp (1938). Parallèlement, Kármán (1938), en utilisant les équations de l'eau peu profonde et l'hypothèse de la constance de l'énergie, parvient à donner une solution analytique très élégante en analogie avec la théorie de la dynamique des gaz. Un saut notable dans l'approche de résolution du problème a été marqué par Lénau (1979). Ce dernier réussit à donner une solution analytique du problème pour les canaux courbes qui est valide pour des grandes courbures et $F_0 > 2$.

L'une des récentes approches analytiques en date est le fruit du travail d'Hessaroueyeh et Tahershamsi (2009). Etendant l'idée de Steffler et al. (1985) appliquée au régime subcritique, les auteurs ont utilisé la même technique des perturbations, cette fois pour le cas du régime torrentiel où ils parvinrent à résoudre les équations différentielles linéarisées. Très récemment, Amara et al. (2020) développèrent une solution analytique originale valable pour la partie courbée et la partie rectiligne aval du canal. Basé sur un modèle quasi-2D, la solution fut trouvée par transformée de Laplace et les résultats furent très satisfaisants à cet effet.

Nous proposons alors dans ce travail une solution analytique du problème des ondes de choc dans les canaux courbes en régime supercritique par le biais de la méthode des perturbations. La solution est confrontée aux mesures expérimentales disponibles en littérature.

MODELE MATHEMATIQUE DE BASE

Dans un système de coordonnées curvilignes (s, n, z) , les équations différentielles régissant un écoulement de liquide parfait en hypothèses classiques d'une eau peu profonde à l'état stationnaire s'écrivent (Bhalla, 1989) :

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{n}{R}\right)} \frac{\partial(uh)}{\partial s} + \frac{\partial(vh)}{\partial n} + \frac{vh}{R\left(1 + \frac{n}{R}\right)} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{n}{R}\right)} \frac{\partial(u^2h)}{\partial s} + \frac{\partial(uvh)}{\partial n} + \frac{2(uvh)}{R\left(1 + \frac{n}{R}\right)} + \frac{g}{\left(1 + \frac{n}{R}\right)} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{h^2}{2} \right) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{n}{R}\right)} \frac{\partial(uvh)}{\partial s} + \frac{\partial(v^2h)}{\partial n} + \frac{(v^2h - u^2h)}{R\left(1 + \frac{n}{R}\right)} + g \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{h^2}{2} \right) = 0 \quad (3)$$

Avec s la coordonnée longitudinale curviligne, n la coordonnée radiale à partir l'axe du canal de rayon R (Figure 1), h , u et v sont le tirant d'eau, les vitesses axiale et radiale respectivement.

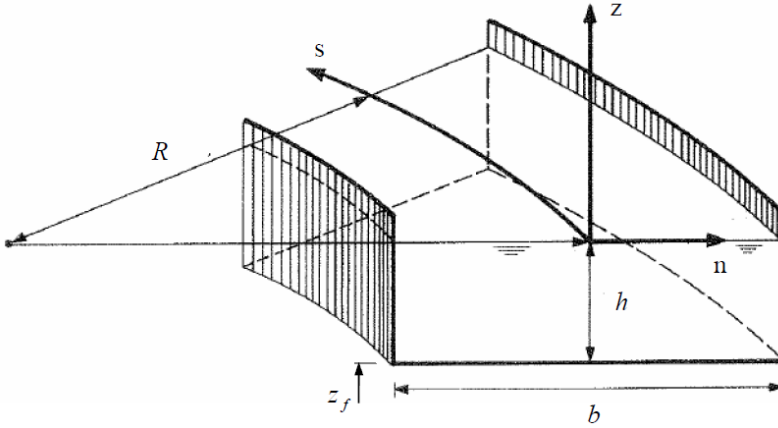


Figure 1 : Schéma de définition des paramètres de l'écoulement en canal courbe

Une normalisation peut être opérée à la formulation non conservative des équations du mouvement (1) à (3) pour les rendre adimensionnelles. Ainsi, en notant :

$$\begin{aligned}
 u &= Uu_* ; v = Uv_* ; h = Hh_* ; s = Bs_* ; n = Bn_* ; R = R_0R_* ; \\
 \alpha &= B/R_0 ; F = U^2/gH
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

Où R_0 est le rayon de la paroi intérieure du canal, $B = b/2$ sa demi-largeur et U et H sont respectivement la vitesse et le tirant d'eau de l'écoulement d'approche. Après simplification, les équations gouvernantes deviennent alors :

$$\frac{1}{\beta} \frac{\partial(u_* h_*)}{\partial s_*} + \frac{\partial(v_* h_*)}{\partial n_*} + \frac{\alpha}{R_*} \frac{v_* h_*}{\beta} = 0
 \tag{5}$$

$$\frac{u_*}{\beta} \frac{\partial u_*}{\partial s_*} + v_* \frac{\partial u_*}{\partial n_*} + 2\alpha \frac{u_* v_*}{\beta R_*} + \frac{1}{\beta F^2} \frac{\partial h_*}{\partial s_*} = 0
 \tag{6}$$

$$\frac{u_*}{\beta} \frac{\partial v_*}{\partial s_*} + v_* \frac{\partial v_*}{\partial n_*} + \alpha \frac{v_*^2 - u_*^2}{\beta R_*} + \frac{1}{F^2} \frac{\partial h_*}{\partial n_*} = 0
 \tag{7}$$

Ici, $\beta = 1/(1 + n_*\alpha/R_*)$ facteur de courbure adimensionnel. Dans les équations (5) à (7), il a été supposé, pour en aboutir, que $\alpha \ll 1$. Ceci autorise une solution pour des courbures relativement faibles, ce qui exclu naturellement les canaux à fortes courbes.

SOLUTION ANALYTIQUE

Sous leur forme originelle, les équations réduites du mouvement (5) à (7) sont simplement insolubles analytiquement. Pour se prêter à un traitement analytique, une approche par la méthode des séries de perturbations est appliquée (Van Dyke, 1975). La solution du problème est alors obtenue en termes de série de puissances croissantes de α pour les variables dépendantes comme suit :

$$\Phi_*(s_*, n_*, F, \alpha) = \Phi_0(s_*, n_*, F) + \alpha \Phi_1(s_*, n_*, F) + \alpha^2 \Phi_2(s_*, n_*, F) + \dots \quad (8)$$

Où Φ_i est la solution à l'ordre i . En opérant un développement en série binomiale au facteur de courbure β , un groupement en puissance identique de α pour les fonctions Φ est effectué pour ensuite être résolues séparément. Le groupement au premier ordre incluant la solution à l'ordre 0 s'écrit :

$$\frac{\partial u_1}{\partial s_*} + \frac{1}{F^2} \frac{\partial h_1}{\partial s_*} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial s_*} + \frac{1}{F^2} \frac{\partial h_1}{\partial n_*} = \frac{1}{R_*} \quad (10)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial s_*} + \frac{\partial h_1}{\partial s_*} + \frac{\partial v_1}{\partial n_*} = 0 \quad (11)$$

C'est le modèle obtenu pour la première fois par Steffler et al. (1985). En résolvant les équations (9) à (11) pour h_1 , on obtient :

$$\frac{\partial^2 h_1}{\partial n_*^2} = (F^2 - 1) \frac{\partial^2 h_1}{\partial s_*^2} \quad (12)$$

Pour un écoulement supercritique, l'équation (12) est de type hyperbolique. Elle décrit un réseau d'ondes stationnaires sur le champ d'écoulement de base. La

solution générale de cette équation d'ondes est alors (Myint-U et Debnath, 2007):

$$h_1(s_*, n_*) = f_1(s_* + n_* \sqrt{F^2 - 1}) + f_2(s_* - n_* \sqrt{F^2 - 1}) \tag{13}$$

Avec f_1 et f_2 sont des fonctions quelconques dépendant des conditions aux limites. Celles-ci, pour le présent problème, sont :

$$h_1(0, n_*) = 0 \tag{14}$$

$$v_1(0, n_*) = 0 \tag{15}$$

$$v_1(s_*, B) = 0 \tag{16}$$

$$\left. \frac{\partial h_1}{\partial n_*} \right|_{n_* = \pm 1} = \frac{F^2}{R_*} \tag{17}$$

L'adjonction de ces conditions avec la solution générale permet d'aboutir à la solution particulière. Combinée avec (8), la solution analytique finale du problème en coordonnées adimensionnelles s'écrit alors :

$$h(s_*, n_*) = H + \frac{bH}{2R} \frac{F^2}{\sqrt{F^2 - 1}} \Gamma(s_*, n_*) \tag{18}$$

Avec :

$$\Gamma(s_*, n_*) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \left\{ \begin{array}{l} \left[s_* - (n_* - 1)(2k - 1)\sqrt{F^2 - 1} \right] - \left[s_* - (1 + n_*)(2k - 1)\sqrt{F^2 - 1} \right] \\ s_* > (n_* - 1)(2k - 1)\sqrt{F^2 - 1} \quad s_* > (1 + n_*)(2k - 1)\sqrt{F^2 - 1} \end{array} \right\} \tag{19}$$

Telle est la solution analytique exacte de la variation du champ d'écoulement suite à la propagation du réseau d'ondes de surface. Celles-ci forment un motif périodique dont le premier pic apparaît à $s = b\sqrt{F^2 - 1}$. Il est à noter que la présente solution n'est valide que pour un régime supercritique ($F > 1$). Le cas contraire, l'équation (12) serait de type elliptique et le réseau d'ondes de surface n'apparaît plus. Mathématiquement, la solution en termes de lignes caractéristiques devient dans ce cas imaginaire.

RESULTATS ET DISCUSSION

L'intérêt pratique de la solution proposée est le calcul du champ d'écoulement supercritique abordant un alignement courbe d'un canal de profil rectangulaire. L'objectif est alors de déterminer le profil de la ligne d'eau le long de la paroi externe du canal $h(s_*, n_* = 1)$. Pour tester l'approche proposée, une comparaison aux mesures expérimentales d'Ippen (1936), Poggi (1956) et ceux de Beltrami et al. (2007) a été faite. Les caractéristiques des écoulements des divers tests sont groupées dans le tableau (1).

Tableau 1 : Caractéristiques des tests expérimentaux utilisés

Test N°	Référence	b (m)	H (mm)	R (m)	F
1	Ippen (1936)	0,3048	43,9	3,048	6,58
2	Poggi (1956)	0,2500	46,8	3,00	4,83
3	Beltrami et al. (2007)	0,200	52,0	0,80	3,00

Les résultats de calcul de la ligne d'eau sur la paroi externe du canal pour les divers tests sont reportés, respectivement sur les figures (2) à (4). Comme l'on peut constater pour le test N°1, la comparaison de la solution obtenue avec les mesures montre une allure similaire mais cependant avec un léger déphasage. On note par ailleurs une bonne concordance entre le maximum du niveau d'eau calculé (23,38 cm) et celui mesuré. L'écart relatif n'est alors que 1,78 %. La seule réserve à noter est que le calcul prévoit l'apparition du pic à $S=1,98$ m alors que celui-ci est atteint bien avant à $S=1,63$ m. Ceci peut être attribué en majeure partie à l'ordre d'approximation de la solution analytique où les effets de frottements et autres effets non linéaires négligés.

Dans le test N° 2, la solution analytique congrue notablement avec les mesures expérimentales. La surface libre sur la paroi latérale manifeste une variation linéaire jusqu'à atteindre son maximum de 13,78 cm à l'angle $\theta=22,56^\circ$. Ces résultats recourent parfaitement les observations où l'on note un maxima de 13,53 cm touché à l'angle $\theta=22,30^\circ$. L'erreur relative n'est alors que de 1,85 % pour la prédiction du niveau d'eau. Toutefois, la linéarité de la solution se fait ressentir en dernière phase de descente où un léger désaccord est noté avec l'expérience.

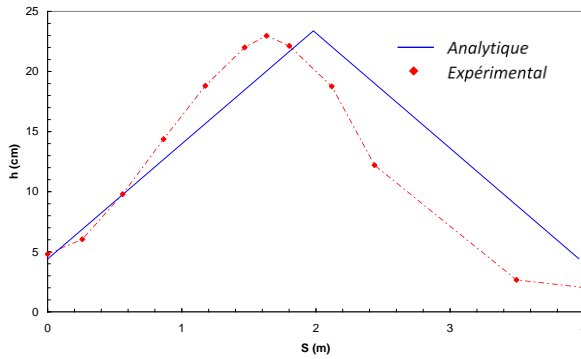


Figure 2 : Profil de la ligne d'eau sur la paroi externe du canal $h(s)$, test N° 1 (Ippen, 1936)

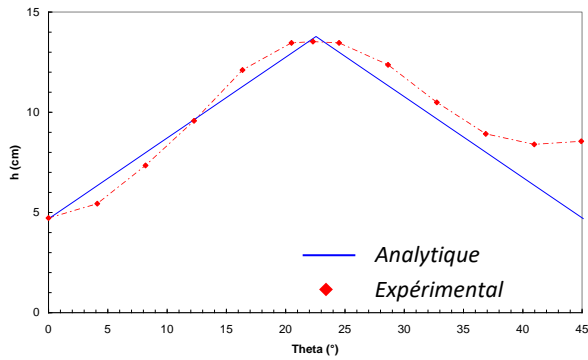


Figure 3 : Profil de la ligne d'eau sur la paroi externe du canal $h(\theta)$, test N° 2 (Poggi, 1956)

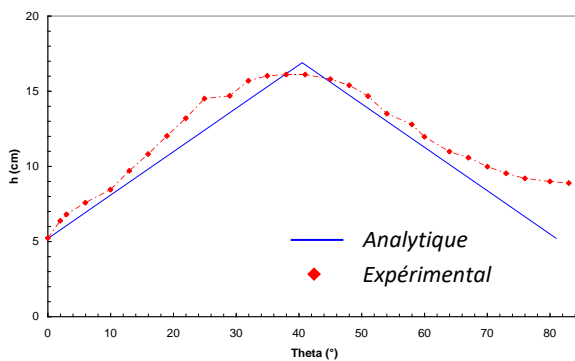


Figure 4 : Profil de la ligne d'eau sur la paroi externe du canal $h(\theta)$, test N° 3 (Beltrami et al. 2007)

Pour le dernier test (N°3) quant à lui, la comparaison de la solution obtenue avec les mesures montre une bonne concordance aussi bien en montée qu'en phase de descente. Le maximum du niveau d'eau est atteint à $\theta=41^\circ$ avec une valeur de 16,10 cm alors le modèle analytique prédit une valeur de 16,90 cm à $\theta=40,51^\circ$. La congruence est très appréciable ici et montre bien la fiabilité du modèle proposé. Néanmoins, le même constat revient qui est celui de la différence d'allure. Le modèle étant linéarisé, la solution forme un triangle symétrique parfait alors que l'observation montre une allure légèrement arrondie. Les effets de friction et autres apparaissent clairement dans celle-ci.

CONCLUSION

Le présent travail avait pour objectif de proposer une solution analytique exacte pour le calcul des canaux courbes en régime supercritique. A partir des équations différentielles non linéaires du mouvement, un développement en séries de perturbations asymptotiques a été fait. Par la suite, le modèle mathématique simplifié au premier ordre a été combiné pour aboutir à l'équation classique des cordes vibrantes. La solution analytique a été obtenue par la méthode de d'Alembert après adjonction des conditions aux limites. La solution ainsi obtenue forme une série d'ondes croisées de période constante et d'allure triangulaire à la paroi.

La validation de l'approche analytique proposée a été faite sur la base de trois tests issus des mesures expérimentales de référence à ce sujet. Les résultats ainsi obtenus ont montré une bonne concordance avec l'expérience tant que les hypothèses sous-jacents le modèle mathématique ne sont mises à défaut. En toute circonstance, le maximum du niveau d'eau à la paroi a été très bien prédit ainsi que sa position, paramètres seuls jugés de première importance en pratique de dimensionnement de tels ouvrages hydrauliques.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- AMARA L., BERREKSI A., ACHOUR B. (2020). Approximate analytical solution for supercritical flow in rectangular curved channels. Applied Mathematical Modelling, Vol.80, pp.191-203.
- BELTRAMI G. M., DEL GUZZO A. REPETTO R. A. (2007). Simple method to regularize supercritical flow profiles in bends, Journal of Hydraulic Research, Vol. 45, Issue 6, pp.773-786.

- BHALLAMUDI M.S. (1989). Numerical modeling of open-channel flows with fixed and movable beds, Thèse de Doctorat, Université de Washington.
- HESSAROEYEH M.G., TAHERSHAMSI A. (2009). Analytical model of supercritical flow in rectangular chute bends, *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 47, Issue 5, pp.566-573
- IPPEN A.T. KNAPP R.T. (1938). Experimental Investigations of Flow in Curved Channels, Report to Los Angeles County Flood Control District, reproduced by US Engineering Office, Los Angeles.
- IPPEN A.T. (1936). An analytical and experimental study of high velocity flow in curved sections of open channels, Thèse de Doctorat, California Institute of Technology.
- KÁRMÁN TH. V. (1938). Eine praktische Anwendung der Analogie zwischen Überschallströmung in Gasen und überkritischer Strömung in offenen Gerinnen, *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, Vol. 18, Issue 1, pp.49-56.
- LENAU C.W. (1979). Supercritical flow in bends of trapezoidal section, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, Vol. 105, Issue 1, pp.43-54.
- MYINT-U T., DEBNATH L. (2007). *Linear partial differential equations for scientists and engineers*, Springer Science & Business Media.
- POGGI B. (1956). Correnti veloci nei canali in curva, *L'energia Elettrica*, Vol. 34, pp.465-480.
- STEFFLER P.M., RAJARATNAM N., PETERSON A. (1985). Water surface at change of channel curvature, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 111, Issue 5, pp.866-870
- VAN DYKE M. (1975). *Perturbation methods in fluid mechanics*, USA, The parabolic Press.