Exercice n° 2

Les considérations théoriques relatives à la conduite en charge en forme de fer à cheval ont été présentées au cours de l'exercice n°1 (Fichier disponible au téléchargement). Les relations utilisées dans l'exemple d'application qui suit sont celles de l'exercice n°1, affectées de la même numérotation.

Soit la conduite en charge en forme de fer à cheval représentée par la figure 1. Elle écoule un débit volume Q d'un liquide de viscosité cinématique ν, sous un gradient de la perte de charge linéaire J. Sa paroi interne est caractérisée par la rugosité absolue ε. La conduite est définie par ses dimensions linéaires $Y = D$ et y, où D est le diamètre du cercle de centre O et de rayon $\overleftrightarrow{OE} = \overleftrightarrow{OC} = \overleftrightarrow{OB} = \overleftrightarrow{OG}$.

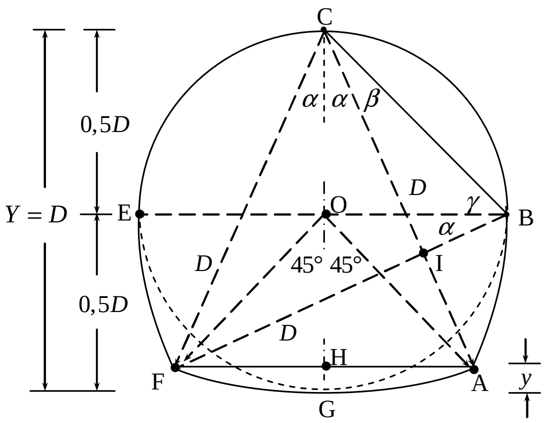

Figure 1 : Schéma de définition de la conduite en charge en forme de fer à cheval

On souhaite déterminer les dimensions linéaires D et y de la conduite en charge en forme de fer à cheval représentée par la figure 1. Utiliser pour cela la **MMR** en vous aidant des considérations théoriques ci-dessus exposées.

On donne :

$$Q = 3{,}109\, m^3/s \;;\; J = 3.10^{-4} \;;\; \varepsilon = 3.10^{-4}\, m \;;\; \nu = 10^{-6}\, m^2/s\,.$$

Solution

Résolvons le problème en admettant que le modèle rugueux de référence écoule le débit $\overline{Q} = Q$, sous le gradient de la perte de charge linéaire $\overline{J} = J$, du même liquide de viscosité cinématique ν.

Les données du problème sont alors telles que :

i. selon la relation (35), le diamètre du modèle rugueux de référence est :

$$\overline{D} = 0{,}53721903\left(\frac{\overline{Q}}{\sqrt{g\overline{J}}}\right)^{2/5} = 0{,}53721903\times\left(\frac{3{,}109}{\sqrt{9{,}81\times 3.10^{-4}}}\right)^{2/5} = 2{,}71294897\, m$$

Laboratoire de Recherche en Hydraulique Souterraine et de Surface
Université de Biskra, BP 145 RP 07000, Biskra, Algérie.
www.larhyss.org, info@larhyss.net ,

ii. selon la relation (30), le diamètre hydraulique $\overline{D_h}$ est :

$$\overline{D_h} = 1,01541906\,\overline{D} = 1,01541906 \times 2,71294897 = 2,75478009\,m$$

iii. Le périmètre mouillé $\overline{P}$ est, en vertu de la relation (29) :

$$\overline{P} = 3,26692049\,\overline{D} = 3,26692049 \times 2,71294897 = 8,86298856\,m$$

iv. Le nombre de *Reynolds* $\overline{R}$ caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence est par suite :

$$\overline{R} = \frac{4\overline{Q}}{\overline{P}\nu} = \frac{4Q}{\overline{P}\nu} = \frac{4 \times 3,109}{8,86298856 \times 10^{-6}} = 1403138,45$$

Rappelons que le nombre de *Reynolds* $\overline{R}$ aurait pu également être calculé par application de la relation (37) ou (38), pour $\overline{Q} = Q$ et $\overline{J} = J$.

v. Le coefficient de correction des dimensions linéaires ψ est, selon la **MMR** (*Achour, 2007, Calcul des conduites et canaux par la MMR, Tome 1 : Conduites et Canaux en charge, LARHYSS/Edition Capitale, 610 pages*) :

$$\psi = 1,35\left[-\log\left(\frac{\varepsilon/\overline{D_h}}{4,75} + \frac{8,5}{\overline{R}}\right)\right]^{-2/5}$$

$$= 1,35 \times \left[-\log\left(\frac{3.10^{-4}/2,75478009}{4,75} + \frac{8,5}{1403138,45}\right)\right]^{-2/5} = 0,73721527$$

vi. Le diamètre D recherché est :

$$D = \psi\overline{D} = 0,73721527 \times 2,71294897 = 2,0000274\,m \cong 2\,m$$

vii. Ainsi, la dimension linéaire y est, en vertu de la relation (12) :

$$y = 0,08856217D = 0,08856217 \times 2,0000274 = 0,17712677\,m \cong 0,177\,m$$

viii. Vérification des calculs

a) ***Darcy-Weisbach***

Vérifions les calculs en déterminant, pour les dimensions linéaires calculées, le gradient J de la perte de charge linéaire selon la relation de *Darcy-Weisbach* :

$$J = \frac{f}{D_h}\frac{Q^2}{2gA^2} \quad (39)$$

- L'aire de la section mouillée A est, selon la relation (19) :

$$A = 0,82932333\,D^2 = 0,82932333 \times 2,0000274^2 = 3,31738424\,m^2$$

- Le diamètre hydraulique D_h est, conformément à la relation (27) :

$$D_h = 1,01541906\,D = 1,01541906 \times 2,0000274 = 2,03086595\,m$$

- Le coefficient de frottement f de la relation (39) est, selon la **MMR** :

$$f = \frac{\psi^5}{16} = \frac{0,73721527^5}{16} = 0,0136098$$

Ainsi, selon la relation (39), le gradient J de la perte de charge linéaire est :

$$J = \frac{f}{D_h}\frac{Q^2}{2gA^2} = \frac{0,0136098}{2,03086595} \times \frac{3,109^2}{2 \times 9,81 \times 3,31738424^2} = 3.10^{-4}$$

Il s'agit bien de la valeur de J donnée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré.

b) ***Formule générale du débit volume***

Selon *Achour et Bedjaoui* (*Achour* and *Bedjaoui*, 2006, Discussion, Exact solutions for normal depth problem, Journal of Hydraulic Research, 44, 5, 715-717) :

$$Q = -4\sqrt{2g}\,A\sqrt{R_h J}\,\log\left(\frac{\varepsilon / R_h}{14,8} + \frac{10,04}{\overline{R}}\right) \tag{40}$$

R_h désigne le rayon hydraulique. Dans la relation (40), le nombre de *Reynolds* $\overline{R}$ s'exprime par :

$$\overline{R} = 32\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{gJR_h^3}}{\nu} \tag{41}$$

La relation (40) est applicable à toutes les formes usuelles de conduites et couvre l'ensemble du domaine turbulent du diagramme de *Moody*.

Le rayon hydraulique R_h est :

$$R_h = D_h / 4 = 2,03086595 / 4 = 0,50771649\,m$$

Le nombre de *Reynolds* $\overline{R}$ est, selon la relation (41) :

$$\overline{R} = 32\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{gJR_h^3}}{\nu} = 32 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 3.10^{-4} \times 0,50771649^3}}{10^{-6}} = 888161,63$$

Ainsi, le débit volume Q est, en vertu de la relation (40) :

$$Q = -4\times\sqrt{2\times 9,81}\times 3,31738424\times\sqrt{0,50771649\times 3.10^{-4}}\times$$
$$\log\left(\frac{3.10^{-4}/0,50771649}{14,8}+\frac{10,04}{888161,63}\right)=3,1123121\,m^3/s\cong 3,112\,m^3/s$$

Ainsi, le débit volume calculé selon la formule générale correspond, avec un écart relatif de moins de 0,11%, à celui donné à l'énoncé de l'exemple d'application considéré.

c) ***Formule de Chézy***

Selon *Chézy*, le débit volume Q est :

$$Q = CA\sqrt{R_h J} \tag{42}$$

où $C\left(m^{0,5}/s\right)$ est le coefficient de résistance de *Chézy*. Selon la **MMR**, celui-ci est donné par :

$$C = \frac{8\sqrt{2g}}{\psi^{5/2}} \tag{43}$$

soit : $C = \dfrac{8\times\sqrt{2\times 9,81}}{0,73721527^{5/2}} = 75,9370434\,m^{0,5}/s \cong 76\,m^{0,5}/s$

Le débit volume Q serait donc, selon la relation (42) :

$$Q = CA\sqrt{R_h J} = 75,9370434\times 3,31738424\times\sqrt{0,50771649\times 3.10^{-4}} = 3,109\,m^3/s$$

Il s'agit bien de la valeur du débit volume Q donnée à l'énonce de l'exemple d'application considéré.